



УДК: 532.527, 532.5.013

MSC 2010: 76M23, 34A05

## Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Васькина

В работе применяется топологический подход для поиска и анализа устойчивости относительных равновесий для системы трех вихрей равной интенсивности в круговой области. Явно выполнена редукция на одну степень свободы. Найдены две новые стационарные конфигурации — равнобедренная и коллинеарная несимметричная, построены бифуркационные диаграммы, выполнен анализ устойчивости для этих случаев.

Ключевые слова: точечный вихрь, редукция, бифуркационная диаграмма, относительные равновесия, устойчивость, периодические решения

---

Получено 22 ноября 2010 года

После доработки 2 марта 2011 года

---

Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 гг.) (№ 2.1.1/554), гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

---

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич

[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований,

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Васькина Анастасия Владимировна

[anvask@gmail.com](mailto:anvask@gmail.com)

Удмуртский государственный университет,

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

## Содержание

<b>1. Введение</b>	120
<b>2. Уравнения движения и редукция по симметрии</b>	120
2.1. Гамильтонова формулировка	120
2.2. Первый интеграл и редукция	121
<b>3. Известные стационарные конфигурации и их устойчивость</b>	123
3.1. Типы критических точек и их устойчивость	124
3.2. Критические точки и бифуркационные кривые	125
3.3. Устойчивость томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций	128
<b>4. Новые стационарные конфигурации и их устойчивость</b>	129
4.1. Равнобедренная конфигурация	129
4.2. Коллинеарная несимметричная конфигурация	134
<b>5. Дискуссия</b>	135

## 1. Введение

Поиск и анализ устойчивости стационарных вихревых конфигураций — классическая проблема, которой, начиная с работы Дж. Дж. Томсона [32], посвящено множество различных исследований. Впервые задачу о движении точечных вихрей в круге рассмотрел А. Гринхилл в 1877 году [21], с помощью метода зеркальных отражений он исследовал движение одного и двух вихрей внутри круговой области. В 1931 году Т. Хавелок в работе [24] продолжил исследование устойчивости стационарных конфигураций вихрей внутри круга. Он поставил и решил вопрос о линейной устойчивости полигональных конфигураций вихрей равных интенсивностей внутри круговой области. Это исследование обобщает анализ устойчивости аналогичных конфигураций вихрей на плоскости, выполненный Дж. Дж. Томсоном.

Из общих работ по движению точечных вихрей в жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками, следует также отметить работу Лина [28], в которой, в частности, показано, что уравнения движения вихрей внутри и вне кругового цилиндра являются гамильтоновыми с той же скобкой, что и в отсутствие цилиндра. Среди современных исследований движения вихрей внутри круга отметим работы [8, 23, 26, 27, 30].

В работе [3] предложено при анализе устойчивости использовать бифуркационные диаграммы системы. К сожалению, этот метод не получил должного распространения, хотя он тесно связан с топологическим анализом [1, 6, 13]. С помощью методов, развитых в работах [1, 2, 4], мы будем применять топологический подход для поиска и анализа устойчивости относительных равновесий для системы трех вихрей равной интенсивности в круговой области.

## 2. Уравнения движения и редукция по симметрии

### 2.1. Гамильтонова формулировка

Рассмотрим движение  $N = 3$  вихрей в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками в форме кругового цилиндра радиуса  $R$ . Записывая



координаты вихрей  $(x_k, y_k)$  в комплексной форме  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , уравнения движения можно представить в следующем виде (см., например [2]):

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{j \neq k}^N \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j z_j}{R^2 - z_k \bar{z}_j} \right), \quad (2.1)$$

где  $\Gamma_j$  — интенсивности вихрей.

Уравнения (2.1) можно представить в гамильтоновой форме [28]

$$\dot{x}_k = \{H, x_k\}, \quad \dot{y}_k = \{H, y_k\}, \quad \{x_k, y_j\} = -\frac{1}{\Gamma_k} \delta_{kj} \quad (2.2)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k < j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k - z_j| + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \leq j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |R^2 - z_k \bar{z}_j|. \quad (2.3)$$

Эту величину мы будем также называть энергией системы вихрей.

Приведем здесь вид гамильтониана в полярных координатах  $(r_k, \varphi_k)$ , определяемых соотношением  $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ , которым мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k < j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln \frac{r_k^2 + r_j^2 - 2r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{R^4 + r_k^2 r_j^2 - 2R^2 r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln(R^2 - r_k^2). \quad (2.4)$$

Представление системы в гамильтоновой форме позволяет использовать для поиска относительных равновесий и анализа их устойчивости топологические методы анализа гамильтоновых систем, восходящие к С. Смейлу [13] и получившие дальнейшее развитие в ряде работ [6, 14, 20]; в данном исследовании мы будем в основном опираться на результаты работы [1].

## 2.2. Первый интеграл и редукция

Уравнения движения вихрей (2.1) допускают один дополнительный первый интеграл движения — *момент завихренности*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Gamma_k z_k \bar{z}_k. \quad (2.5)$$

Существование этого интеграла является следствием инвариантности уравнений движения относительно поворотов вокруг центра круга. Отметим, что отличие от системы на плоскости в данной задаче отсутствуют линейные по  $z_k$  интегралы, так как инвариантность относительно трансляций пропадает при добавлении границы. Это, в частности, приводит к тому, что система трех вихрей неинтегрируема. Интегрируемые системы трех вихрей на плоскости и двух вихрей в круговом цилиндре подробно обсуждаются в книге [2] (хаотические решения в ограниченной задаче изучены в [5]).

Для качественного анализа этой системы, нахождения относительных равновесий и анализа их устойчивости выполним редукцию по симметрии; для этого перейдем к новым переменным  $\rho_k, \psi_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ ,  $I = \rho_3$  по формулам

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_3, & \psi_2 &= \varphi_2 - \varphi_3, & \psi_3 &= \varphi_3, \\ \rho_1 &= \Gamma_1 r_1^2 / 2, & \rho_2 &= \Gamma_2 r_2^2 / 2, & I &= (\Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2 + \Gamma_3 r_3^2) / 2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\psi_k \in (-\pi, \pi)$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , — угловые переменные (см. рис. 1), а области определения переменных  $\rho_1, \rho_2, I$  находятся из соотношений

$$0 < \frac{2\rho_1}{\Gamma_1} < R^2, \quad 0 < \frac{2\rho_2}{\Gamma_2} < R^2, \quad 0 < \frac{2(I - \rho_1 - \rho_2)}{\Gamma_3} < R^2. \quad (2.7)$$

Можно показать, что новые координаты являются каноническими:

$$\{\rho_1, \psi_1\} = \{\rho_2, \psi_2\} = \{I, \psi_3\} = 1,$$

остальные скобки равны нулю. В случае интенсивностей разных знаков одна из величин  $\rho_1, \rho_2$  отрицательна.

Так как в данной работе мы рассматриваем лишь равные интенсивности, то всюду в дальнейшем без ограничения общности будем полагать

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1, \quad R = 1.$$

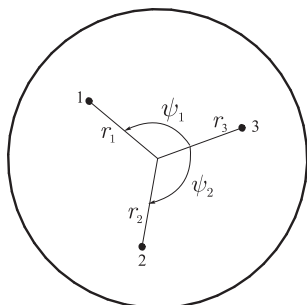


Рис. 1. Определение относительных угловых переменных  $\psi_k$ .

При этом области изменения переменных (2.6) и интеграла момента (2.5) задаются явно следующим образом:

$$0 < \rho_k < 1/2, \quad 0 < I < 3/2, \quad -\pi < \psi_k < \pi, \quad k = 1, \dots, 3.$$

Выразив из (2.6) координаты вихрей

$$\varphi_1 = \psi_1 + \psi_3, \quad \varphi_2 = \psi_2 + \psi_3, \quad \varphi_3 = \psi_3, \quad (2.8)$$

$$r_1 = \sqrt{2\rho_1}, \quad r_2 = \sqrt{2\rho_2}, \quad r_3 = \sqrt{2(I - \rho_1 - \rho_2)}$$

и подставив их в гамильтониан (2.4), получим

$$\begin{aligned} H = & -\frac{3}{4\pi} \ln 2 + \frac{1}{4\pi} [\ln(1 - 2\rho_1) + \ln(1 - 2\rho_2) + \ln(1 - 2(I - \rho_1 - \rho_2))] - \\ & - \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 + 4\rho_1\rho_2 - 4\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)} + \ln \frac{I - \rho_1 - 2\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2}{1 + 4\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{I - \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1}{1 + 4\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, функция Гамильтона не зависит от  $\psi_3$ , т.е.  $H = H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)$  и переменная  $\psi_3$  — циклическая. Следовательно, уравнения движения, описывающие эволюцию переменных  $\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2$ , отделяются и представляются в канонической форме

$$\dot{\rho}_k = \frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_k}, \quad \dot{\psi}_k = -\frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (2.10)$$

Итак, мы выполнили редукцию исходной системы к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы (2.10), параметрически зависящей от  $I$ .

По известным решениям  $\rho_k(t), \psi_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , системы (2.10) зависимость  $\psi_3(t)$  находится при помощи квадратуры

$$\dot{\psi}_3(t) = -\frac{\partial H(I, \rho_1(t), \rho_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t))}{\partial I}. \quad (2.11)$$



Как известно, рассматриваемые относительные равновесия, т. е. периодические решения системы (2.1), являются неподвижными точками приведенной системы (2.10) и, следовательно определяются критическими точками гамильтониана (2.9). При этом «устойчивость по Раусу» для относительных равновесий исходной системы эквивалентна «устойчивости по Ляпунову» для приведенной системы.

### 3. Известные стационарные конфигурации и их устойчивость

Известны две стационарные конфигурации трех вихрей в круговой области:

- *равносторонний треугольник (томсоновская конфигурация)* (рис. 2а);
- *симметричная коллинеарная конфигурация* (рис. 2б).

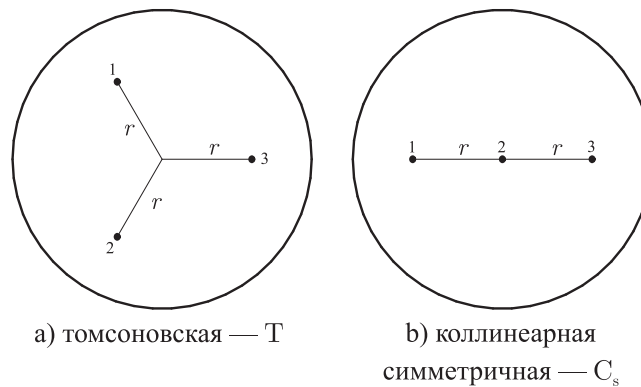


Рис. 2. Известные стационарные конфигурации трех вихрей в круге.

Подобные конфигурации существуют и в общей задаче  $N$  одинаковых вихрей (равносторонний полигон и симметричная относительно центра коллинеарная конфигурация). Результаты по их устойчивости содержатся в работах [7, 8, 24]. В работе [8] отмечено, что в случае трех вихрей имеется изолированное значение параметра, при котором томсоновская конфигурация теряет устойчивость. Рассмотрим устойчивость этих конфигураций с точки зрения топологического подхода и бифуркационного анализа.

В соответствии с топологическим подходом [1], прежде всего на плоскости значений первых интегралов  $I, H$  необходимо построить бифуркационную диаграмму системы, на которой рассматриваемые семейства критических точек соответствуют бифуркационным кривым. Изложим более подробно использование бифуркационной диаграммы в анализе устойчивости.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Бифуркационную диаграмму в некоторых работах называют также диаграммой Смейла [14] или диаграммой энергии–момента [17] в зависимости от области исследований. Некоторые авторы (см., например, [17]) метод анализа устойчивости на основе бифуркационной диаграммы также называют методом энергии–момента.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Определение и метод построения бифуркационной диаграммы системы будут ясны из изложенного ниже анализа, поэтому мы не будем останавливаться здесь на формальных определениях.

### 3.1. Типы критических точек и их устойчивость

Напомним основные принципы анализа устойчивости неподвижных точек гамильтоновых систем. Для заданной неподвижной точки  $z_0$  естественным образом возникает две матрицы:

- $\mathbf{B} = \left\| \frac{\partial H}{\partial z_i \partial z_j} \right\|_{z=z_0}$  — матрица квадратичной части гамильтониана;
- $\mathbf{A} = \left\| \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial z_j} \right\|_{z=z_0} = \left\| \mathbf{J}\mathbf{B} \right\|_{z=z_0}$  — матрица линеаризации векторного поля в окрестности неподвижной точки, где  $\mathbf{J}$  — кососимметрическая матрица пуассоновой структуры.

В связи с этим с неподвижными точками системы связаны два инварианта, играющие ключевую роль при исследовании устойчивости:

- 1) *индекс* квадратичной части гамильтониана, т. е. симметрической  $4 \times 4$ -матрицы  $\mathbf{B}$  (обозначим его  $\text{ind}$ ), который принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, что соответствует количеству отрицательных собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}$ ;
- 2) *тип особой точки* в зависимости от собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  линеаризации векторного поля (т. е. матрицы  $\mathbf{A}$ ), который принимает одно из следующих значений:
  - *центр–центр* ( $\lambda_{1,2} = \pm iA, \lambda_{3,4} = \pm iB$ ),
  - *седло–центр* ( $\lambda_{1,2} = \pm iA, \lambda_{3,4} = \pm B$ ),
  - *седло–седло* ( $\lambda_{1,2} = \pm A, \lambda_{3,4} = \pm B$ ),
  - *фокус–фокус* ( $\lambda_{1,2,3,4} = \pm A \pm iB$ ),

где  $A, B$  — вещественные числа.

Индекс квадратичной части  $H$  связан с устойчивостью неподвижных точек и их типом следующим образом [10]:

- 1) если в неподвижной точке индекс квадратичной части  $H$   $\text{ind} = 0$  или  $\text{ind} = 4$ , то неподвижная точка устойчива и является точкой типа центр–центр (*достаточное условие устойчивости*);
- 2) если в неподвижной точке индекс квадратичной части  $H$  нечетное число ( $\text{ind} = 1, 3$ ), то неподвижная точка неустойчива и является точкой типа седло–центр (*достаточное условие неустойчивости*);
- 3) если в неподвижной точке  $\text{ind} = 2$ , то она устойчива, только если является неподвижной точкой типа центр–центр. При этом устойчивость устанавливается при помощи КАМ-теоремы и требует выполнения некоторых дополнительных условий [10, 12].

Таким образом, во многих случаях для анализа устойчивости неподвижных точек достаточно вычислить индекс квадратичной части  $H$ , и лишь если он равен 2, необходимо уточнить тип точки, анализируя собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

Как правило, собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  линеаризации векторного поля, т. е. корни характеристического полинома

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b, \quad (3.1)$$

являются сложными функциями параметров системы (содержащими радикалы). С другой стороны, коэффициенты характеристического полинома  $a, b$  вычисляются существенно проще, поэтому удобнее области, соответствующие различным типам особых точек, изображать на плоскости коэффициентов характеристического полинома (см. рис. 3b, c).

При стандартном применении этих принципов возникает существенная трудность, связанная с тем, что аналитическая формулировка критериев устойчивости (неустойчивости) приводит к труднообозримому набору неравенств, из которых зачастую нелегко выяснить, существует ли само решение, удовлетворяющее нужным критериям. В связи с этим мы выполним анализ устойчивости с использованием бифуркационной диаграммы системы (которая фактически определяет условия существования неподвижных точек) следующим образом.

1. Построим бифуркационную диаграмму системы на плоскости значений первых интегралов  $I, H$ .
2. Расставим на бифуркационных кривых индекс квадратичной части  $H$  (см. рис. 3a).

Тем самым устанавливается устойчивость (неустойчивость) всех относительных равновесий системы, за исключением тех положений равновесия, которые соответствуют отрезкам (ветвям) бифуркационных кривых с индексом два ( $\text{ind} = 2$ ). Для них выполним следующее.

3. На плоскости коэффициентов характеристического полинома (3.1) построим кривые  $(b(I), a(I))$ , соответствующие ветвям бифуркационной диаграммы  $\text{ind} = 2$ , и определим тип неподвижной точки. Нанесем новые точки бифуркаций на бифуркационные кривые. Для тех участков кривых, которые соответствуют типу центр-центр для доказательства устойчивости необходимо проверить условия закручивания и отсутствия резонансов третьего и четвертого порядка.

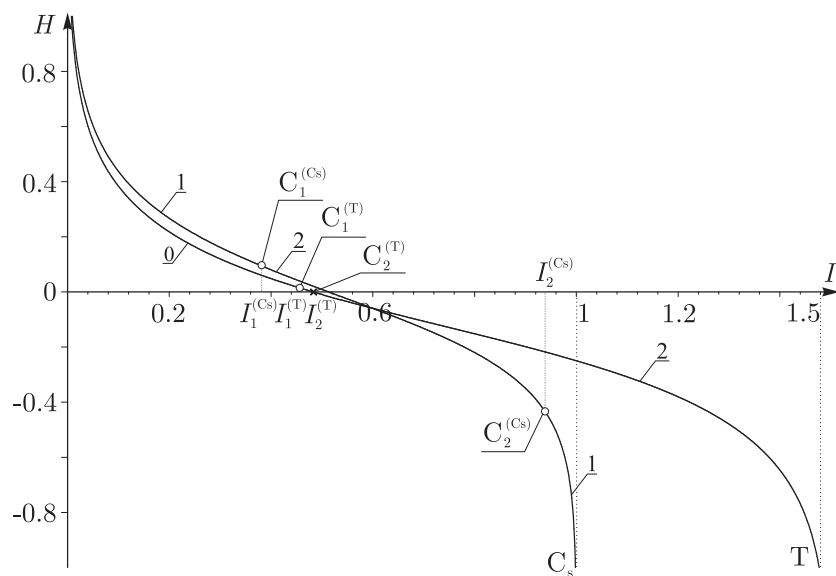
После такой модификации бифуркационная диаграмма позволит ответить на вопросы, касающиеся существования, типа, числа и устойчивости относительных равновесий рассматриваемой системы.

### 3.2. Критические точки и бифуркационные кривые

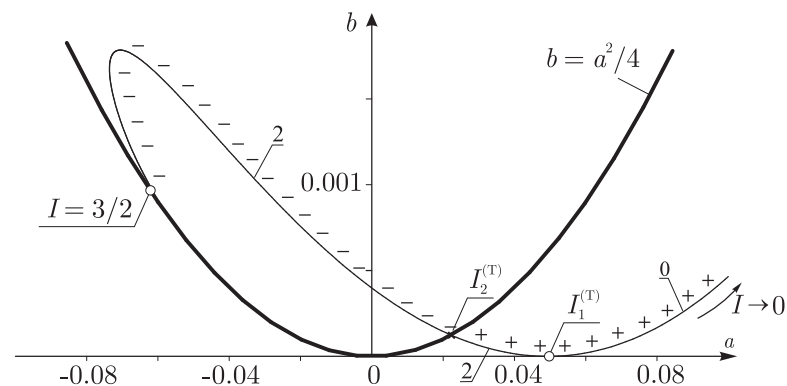
Томсоновская (равносторонняя) конфигурация, которую будем обозначать буквой  $T$ , соответствует двум семействам критических точек гамильтониана (2.9), определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} 1 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{3}, \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = -\frac{2\pi}{3}, \\ 2 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{3}, \quad \psi_1 = -\frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

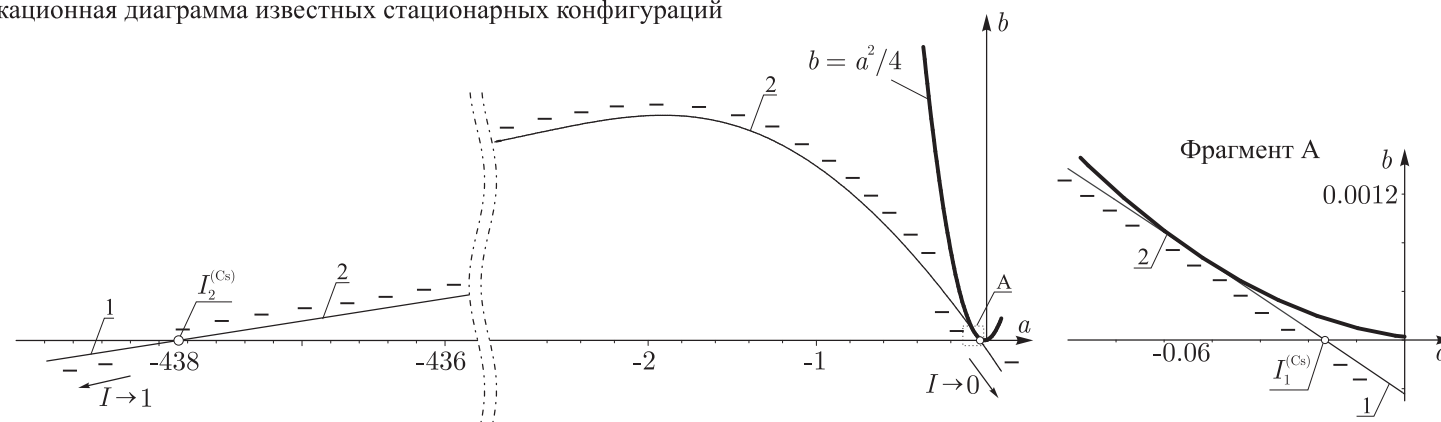
где  $I$  — величина интеграла момента, является параметром семейства, она связана с расстоянием от вихрей до центра круга соотношением  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}I$ . Эти два семейства соответствуют зеркально-симметричным конфигурациям.



а) бифуркационная диаграмма известных стационарных конфигураций



б) плоскость коэффициентов характеристического полинома для томсоновской конфигурации



с) плоскость коэффициентов характеристического полинома для симметричной коллинеарной конфигурации

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для известных стационарных конфигураций трех вихрей в круге (Т — томсоновская конфигурация,  $C_s$  — коллинеарная конфигурация).



Коллинеарная симметричная конфигурация, которую обозначим  $C_s$ , определяет три семейства критических точек, различающихся номером вихря в центре круга

$$\begin{aligned} 1 \text{ семейство: } \rho_1 &= \frac{I}{2}, \quad \rho_2 = 0, \quad \psi_1 = \pi, \\ 2 \text{ семейство: } \rho_1 &= 0, \quad \rho_2 = \frac{I}{2}, \quad \psi_2 = \pi, \\ 3 \text{ семейство: } \rho_1 &= \rho_2 = \frac{I}{2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $I$  — параметр семейства, связан с расстоянием от нецентральных вихрей до центра круга соотношением  $r = \sqrt{I}$ .

Переменные (2.6) непригодны для анализа коллинеарной симметричной конфигурации, так как один из вихрей находится в центре круга, вследствие чего либо один из углов  $\psi_k$ , либо оба сразу не могут быть определены (это аналогично особенности в начале координат при определении полярных координат). Тем не менее, каноническая замена переменных позволяет решить эту проблему; так, для первого семейства в (3.3) она имеет вид

$$\sqrt{2\rho_2} \cos \psi_2 = X, \quad \sqrt{2\rho_2} \sin \psi_2 = Y, \quad \{X, Y\} = 1. \quad (3.4)$$

Из-за симметрии исходной системы (при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ ) относительно перестановок номеров вихрей результаты для остальных двух семейств получаются идентичными.

Вследствие симметрии относительно перестановки номеров вихрей (что выполняется лишь в случае равных интенсивностей  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ ) все пять семейств критических точек для томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций определяют лишь две бифуркационные кривые на плоскости интегралов  $I$ ,  $H$ , которые можно представить в форме

$$\begin{aligned} \text{томсоновская: } H(I) &= \frac{3}{4\pi} \ln \frac{1 - \left(\frac{2I}{3}\right)^3}{2I}, \\ \text{коллинеарная: } H(I) &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1 - I^2)^2}{4I^3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На рис. 3а представлена бифуркационная диаграмма для томсоновской ( $T$ ) и коллинеарной ( $C_s$ ) конфигураций. Области изменения интеграла момента (2.5) определяются неравенствами:

$$\begin{aligned} 0 \leq I \leq \frac{3}{2} & \text{ для томсоновской конфигурации;} \\ 0 \leq I \leq 1 & \text{ для коллинеарной конфигурации.} \end{aligned}$$

Левая граница ( $I = 0$ ) соответствует случаям, когда все вихри находятся в центре круга, правая граница ( $I = \frac{3}{2}$  и  $I = 1$ ) соответствует случаям, когда вихри касаются границ круга (кроме центрального вихря для коллинеарной конфигурации). Во всех случаях энергия конфигураций стремится к  $+\infty$  на левой границе и к  $-\infty$  на правых границах, поэтому при приближении к этим значениям интеграла  $I$  на бифуркационной диаграмме (рис. 3а) наблюдается асимптотическое поведение бифуркационных кривых  $H(I)$ , соответствующих неподвижным точкам.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При малых значениях параметра  $I$  бифуркационная диаграмма для томсоновской и коллинеарной конфигураций изоморфна плоскому случаю.

Как было показано выше, каждой точке на бифуркационных кривых соответствует несколько неподвижных точек системы (2.10). Это справедливо также и для других возможных значений  $(I_0, H_0)$ , не лежащих на кривых, — им, как правило, соответствует несколько различных частей несвязного интегрального многообразия  $M_{I_0, H_0} = \{\vec{z} \mid H(z) = H_0, I(z) = I_0\}$ .

### 3.3. Устойчивость томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций

**Устойчивость томсоновской конфигурации.** Расставим индексы квадратичной части гамильтониана  $H$  (2.9) на ветви бифуркационной диаграммы, соответствующей томсоновской конфигурации. Точки смены индекса (точки бифуркации), т. е. точки, в которых собственные значения матрицы  $\mathbf{B}$  меняют знак (обращаются в нуль), находятся из уравнения  $\det \mathbf{B} = 0$ , которое в данном случае имеет вид [8]

$$5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1 = 0, \quad p = r^2 = \frac{2}{3}I. \quad (3.6)$$

В области изменения интеграла момента  $0 \leq I \leq \frac{3}{2}$  лежит лишь один корень этого уравнения  $I_1^T \approx 0.456$ . Вычисление индекса слева от точки бифуркации дает  $\text{ind} = 0$ , справа —  $\text{ind} = 2$  (рис. 3а). При  $I > I_1^T$ , где  $\text{ind} = 2$ , следует уточнить устойчивость, пользуясь линеаризацией векторного поля.

Построим на плоскости коэффициентов характеристического полинома (3.1) кривую  $(a(I), b(I))$ , соответствующую семейству томсоновских конфигураций (3.5) (рис. 3б). При  $I_1^T < I < I_2^T$  она располагается в области, соответствующей неподвижной точке типа центр—центр. Значение  $I_2^T$  находится из уравнения  $a^2(I) - 4b(I) = 0$  и равно  $I_2^T \approx 0.482$ . При  $I > I_2^T$  кривая лежит в области, соответствующей неподвижной точке типа фокус—фокус.

*Таким образом, томсоновская конфигурация*

- 1) *устойчива по Ляпунову при  $0 < I < I_1^T$ ;*
- 2) *устойчива в линейном приближении при  $I_1^T < I < I_2^T$ ;*
- 3) *неустойчива при значении интеграла момента  $I_2^T < I < \frac{3}{2}$ .*

Кроме того, в работе [8] исследована устойчивость томсоновской конфигурации в резонансных случаях  $I = I_1^T$ ,  $I = I_2^T$  и показано, что она

- 4) *неустойчива в случае  $I = I_1^T$ ;*
- 5) *устойчива по Раусу при  $I = I_2^T$ .*

**Устойчивость коллинеарной симметричной конфигурации.** Аналогично найдем точки бифуркации для коллинеарной симметричной конфигурации из уравнения

$$(81p^7 + 27p^6 + 369p^5 + 54p^4 - 312p^3 + 144p - 32)(9p^4 + 27p^3 + 9p^2 - 12p - 4) = 0, \quad p = r^2 = \frac{2}{3}I. \quad (3.7)$$

В области изменения интеграла момента  $0 \leq I \leq 1$  имеется две точки бифуркации  $I_1^{Cs} \approx 0.379$  и  $I_2^{Cs} \approx 0.938$ . Вычисление индекса квадратичной части  $H$  дает следующие результаты:



- 1)  $\text{ind} = 1, I < I_1^{C_s}$  — конфигурация неустойчива;
- 3)  $\text{ind} = 2, I_1^{C_s} < I < I_2^{C_s}$  — необходимо уточнить устойчивость;
- 2)  $\text{ind} = 1, I > I_2^{C_s}$  — конфигурация неустойчива.

Построим на плоскости коэффициентов характеристического полинома (3.1) кривую  $(a(I), b(I))$ , соответствующую семейству коллинеарных симметричных конфигураций (рис. 3с). При  $I_1^{C_s} < I < I_2^{C_s}$  она лежит в области, соответствующей типу неподвижной точки седло–седло.

Таким образом, коллинеарная симметричная конфигурация неустойчива во всей области изменения интеграла момента  $0 \leq I \leq 1$ .

#### 4. Новые стационарные конфигурации и их устойчивость

Из рисунка 3а, изображающего бифуркационные кривые Т и  $C_s$  для томсоновской и коллинеарной конфигураций, видно, что:

- 1) кривые Т и  $C_s$  пересекаются трансверсально;
- 2) на бифуркационных кривых Т и  $C_s$  имеются изолированные точки, в которых происходит смена индекса критических точек гамильтониана, отвечающих данным кривым.

Опираясь на результаты работы [1], можно сделать следующие выводы:

*во-первых, в фазовом пространстве критические точки, соответствующие различным семействам Т и  $C_s$ , изолированы друг от друга при всех значениях параметра  $I$  (так как для неизолированных семейств бифуркационные кривые в точке слияния или пересечения касаются друг друга);*

*во-вторых, согласно теореме об изолированном семействе [1], в точках смены индекса критические точки каждого из семейств либо должны сливаться с точками того же семейства, либо должны рождаться новые критические точки, соответствующие ранее неизвестным конфигурациям.*

Покажем, что в данном случае имеет место второй вариант, т. е. при смене индекса рождаются новые стационарные конфигурации.

Ясно, что искомые новые конфигурации при изменении параметров должны стремиться к томсоновской или коллинеарной симметричной конфигурациям так, чтобы соответствующие им бифуркационные кривые на плоскости  $I, H$  сливались с кривыми Т,  $C_s$  в точках смены индекса. Кроме того, естественно ожидать, что для новых конфигураций симметрия уменьшится, но не пропадет полностью.

Возможные конфигурации, которые удовлетворяют этим требованиям, — это *равнобедренная и коллинеарная несимметричная конфигурации* (рис. 4а, б).

##### 4.1. Равнобедренная конфигурация

В окрестности каждой из двух томсоновских конфигураций (которые отличаются четностью перестановки номеров вихрей) могут появиться три равнобедренные конфигурации, различающиеся номером вихря при вершине (см. рис. 5).

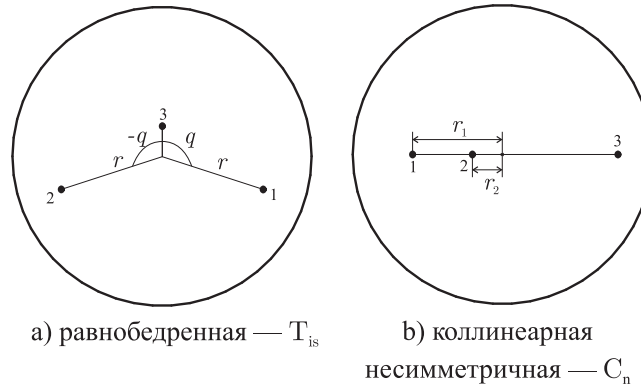


Рис. 4. Новые стационарные конфигурации трех вихрей в круге.

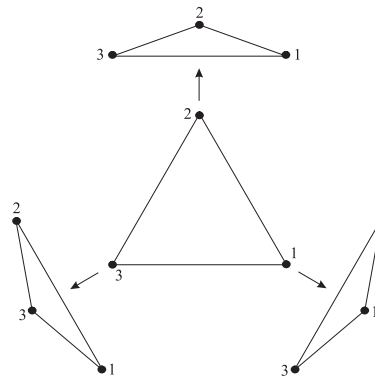


Рис. 5. Появление равнобедренных конфигураций из томсоновских.

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей, достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (2.9) будем искать в виде

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \quad \psi_1 = -\psi_2 = q. \quad (4.1)$$

Обозначим подмножество, определенное этими соотношениями, как

$$M_{\text{is}} = \{(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) \mid \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \psi_1 = -\psi_2 = q\}. \quad (4.2)$$

Подставляя соотношения (4.2) в условия экстремальности гамильтониана (2.9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \right|_{M_{\text{is}}} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \right|_{M_{\text{is}}} = R_{\text{is}}(r, q, I) = 0, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \right|_{M_{\text{is}}} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \right|_{M_{\text{is}}} = \Psi_{\text{is}}(r, q, I) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функции  $R_{\text{is}}(r, q, I)$ ,  $\Psi_{\text{is}}(r, q, I)$  довольно громоздкие, поэтому мы их здесь не приводим (они могут быть легко получены из гамильтониана (2.9) при помощи какого-либо пакета

аналитических вычислений, например, Maple или Mathematica и т. п.). Решая эту систему относительно переменных  $r$ ,  $q$ , получим однопараметрическое семейство (или несколько семейств) критических точек, параметризуемое величиной интеграла  $I$ , которое соответствует равнобедренным конфигурациям.

Точное аналитическое решение системы (4.3) получить невозможно, поэтому будем решать ее численно, используя метод продолжения по параметру. На примере равнобедренной конфигурации опишем этот процесс более подробно.

Сначала ограничим гамильтониан (2.9) на подмногообразии  $M_{\text{is}}$ :

$$H_{\text{is}} = -\frac{3}{4\pi} \ln 2 + \frac{1}{4\pi} [2 \ln(1 - r^2) + \ln(1 - 2(I - r^2))] - \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{r^2(1 - \cos 2q)}{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2q} + 2 \ln \frac{2I - r^2 - 2r\sqrt{2(I - r^2)} \cos q}{2(1 + 2r^2(I - r^2) - 2r\sqrt{2(I - r^2)} \cos q)} \right]. \quad (4.4)$$

Согласно (4.3), критические точки исходного гамильтониана на многообразии  $M_{\text{is}}$  совпадают с критическими точками  $H_{\text{is}}$ .

Затем выберем значение интеграла момента  $I_0$ , близкое к бифуркационному значению  $I_1^{\text{T}}$ , и в окрестности томсоновской конфигурации  $z_{\text{T}}(I_0) = (r^2 = \frac{2}{3}I_0, q = \frac{2\pi}{3})$  численно находим критическую точку  $z_*(I_0)$  гамильтониана  $H_{\text{is}}$ , отличную от  $z_{\text{T}}(I_0)$ . Изменим значение интеграла момента на малую величину  $I_1 = I_0 + \delta$  и в окрестности найденной точки  $z_*(I_0)$  найдем новую критическую точку  $z_*(I_1)$ . Продолжая эту процедуру, построим семейство критических точек, отвечающих равнобедренной конфигурации  $z_{\text{is}}(I)$ . Для найденных семейств построим бифуркационные кривые на плоскости первых интегралов и укажем индекс полного гамильтониана (2.9) для каждой из ветвей.

Используя описанный метод, мы нашли два семейства (без учета перестановки вихрей) равнобедренных конфигураций, которые обозначим  $T_{\text{is}}^{(1)}$ ,  $T_{\text{is}}^{(2)}$  (рис. 6, 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. С учетом перестановок номеров вихрей число семейств равнобедренных конфигураций необходимо умножить на 6.

Найденные равнобедренные конфигурации обладают следующими свойствами (см. рис. 6, 7):

- семейство  $T_{\text{is}}^{(1)}$  продолжается по обе стороны от точки бифуркации  $C_1^{(\text{T})}$ , причем при  $I > I_1^{(\text{T})}$  оно продолжается вплоть до точки  $C_2^{(\text{Cs})}$ , где сливается с семейством коллинеарных симметричных конфигураций, а при  $I < I_1^{(\text{T})}$  оно продолжается до точки возврата  $I = I^{(\text{Tis})} \approx 0.442$ , в которой рождается второе семейство равнобедренных конфигураций  $T_{\text{is}}^{(2)}$ ;
- семейство  $T_{\text{is}}^{(2)}$  при  $I > I^{(\text{Tis})}$  продолжается до второй точки возврата при  $I \rightarrow \frac{1}{2}$ , в которой сливается с семейством коллинеарных несимметричных конфигураций (которое будет описано ниже);
- индекс квадратичной части гамильтониана для семейства  $T_{\text{is}}^{(1)}$  всюду при  $I \neq I_2^{(\text{T})}$  равен 1;
- индекс квадратичной части гамильтониана для  $T_{\text{is}}^{(2)}$  всюду равен 0.

Таким образом, используя численный анализ критических точек системы (2.10) (т. е. относительных равновесий исходной системы (2.1)), мы доказали следующую теорему.

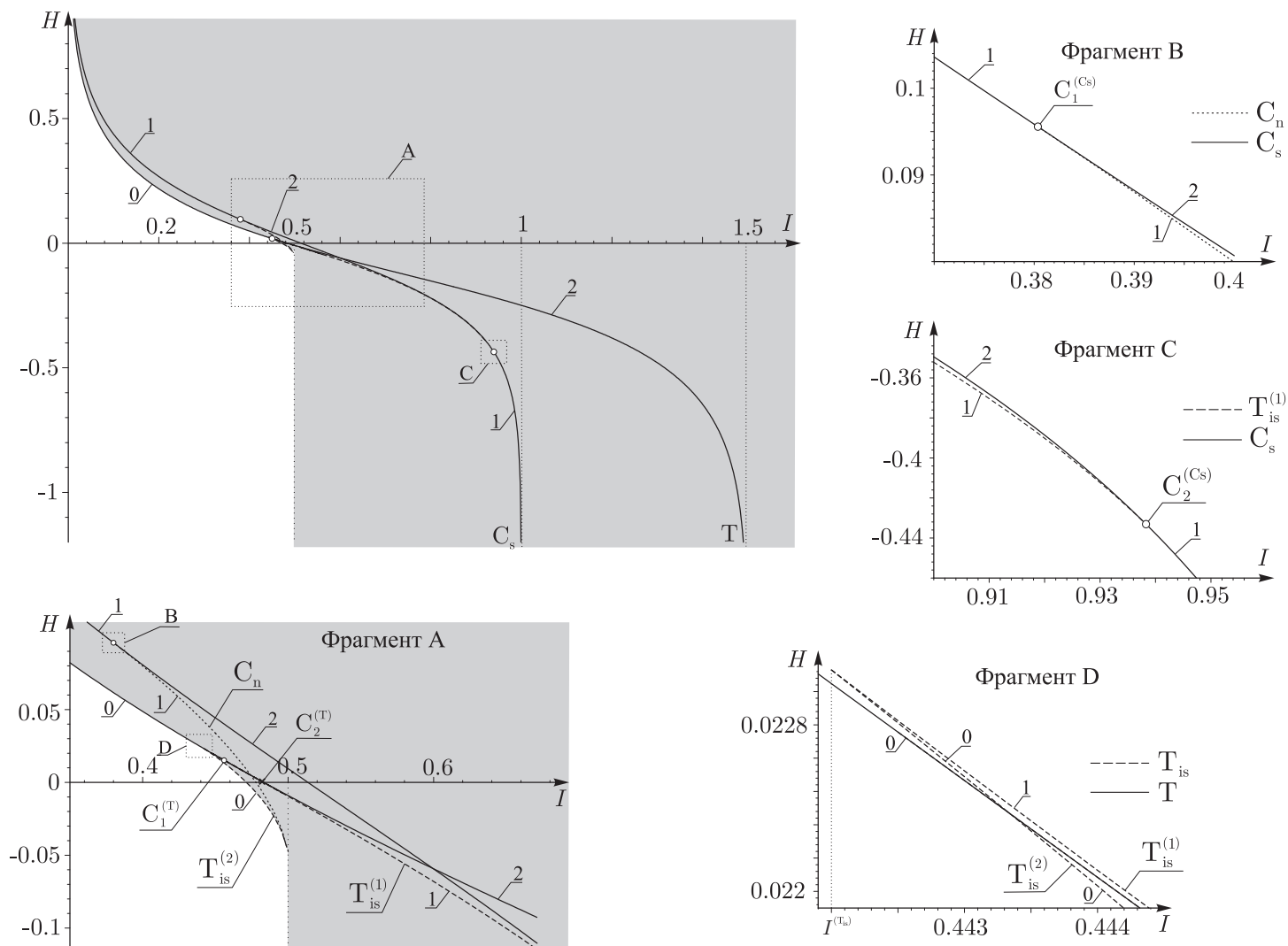


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для стационарных конфигураций трех вихрей в круге (Т — томсоновская,  $C_s$  — коллинеарная симметричная,  $T_{is}$  — равнобедренная,  $C_n$  — коллинеарная несимметричная). Серым цветом отмечена область возможных значений интегралов.

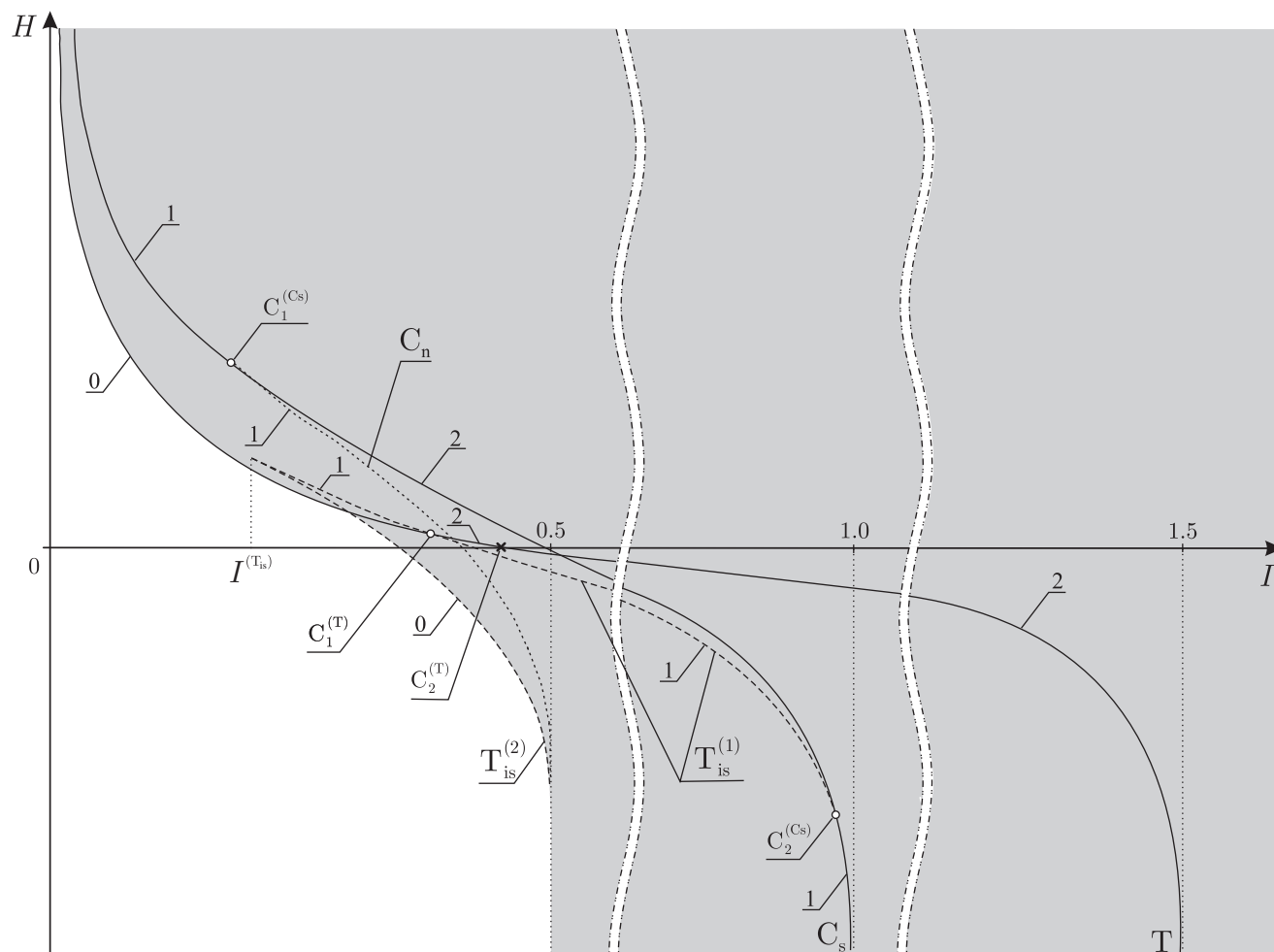


Рис. 7. Схематическое изображение бифуркационной диаграммы (без соблюдения масштаба). Серым цветом отмечена ОВД.

**Теорема 4.** В задаче трех одинаковых вихрей в круге существует два (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейства равнобедренных стационарных конфигураций  $T_{is}^{(1)}$ ,  $T_{is}^{(2)}$ . Причем

- конфигурации семейства  $T_{is}^{(1)}$  — неустойчивы,
- конфигурации семейства  $T_{is}^{(2)}$  — устойчивы (по Ляпунову).

#### 4.2. Коллинеарная несимметричная конфигурация

В окрестности каждой из трех коллинеарных симметричных конфигураций, которые отличаются номером вихря в центре, появляются две коллинеарные несимметричные конфигурации, различающиеся четностью перестановки номеров вихрей и номером вихря, который находится по другую сторону от двух других вихрей относительно центра (см. рис. 8).

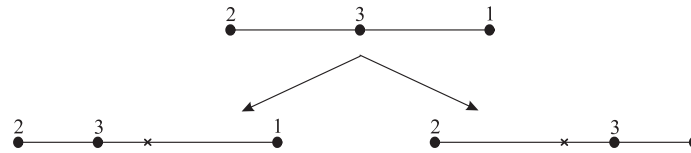


Рис. 8. Появление коллинеарных несимметричных конфигураций.

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей, достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (2.9) будем искать в виде

$$\rho_1 = \frac{r_1^2}{2}, \quad \rho_2 = \frac{r_2^2}{2}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi. \quad (4.5)$$

Обозначим подмногообразие, определенное этими соотношениями, как

$$M_n = \{(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) \mid \rho_1 = \frac{r_1^2}{2}, \rho_2 = \frac{r_2^2}{2}, \psi_1 = \psi_2 = \pi\}. \quad (4.6)$$

Подставляя соотношения (4.6) в условия экстремальности гамильтониана (2.9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \Big|_{M_n} &= \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \Big|_{M_n} = R_n(r, q, I) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \Big|_{M_n} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \Big|_{M_n} = \Psi_n(r, q, I) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Функции  $R_n(r, q, I)$ ,  $\Psi_n(r, q, I)$  мы также не приводим здесь в силу их громоздкости. Решая эту систему методом продолжения по параметру относительно переменных  $r_1$ ,  $r_2$ , получим одно семейство критических точек (будем обозначать его  $C_n$ ), параметризуемое величиной интеграла  $I$ , соответствующее коллинеарным несимметричным конфигурациям. Для найденного семейства построим бифуркационную кривую на плоскости первых интегралов и укажем индекс квадратичной части гамильтониана (2.9) (рис. 6).



ЗАМЕЧАНИЕ 8. С учетом перестановок число семейств коллинеарных несимметричных конфигураций необходимо также умножить на 6.

Найденные коллинеарные несимметричные конфигурации обладают следующими свойствами (см. рис. 7):

- семейство  $C_n$  рождается в точке  $I = I_1^{(C_s)}$  и продолжается до точки возврата при  $I \rightarrow \frac{1}{2}$ , в которой оно сливается с семейством равнобедренных конфигураций  $T_{is}^{(2)}$ ;
- индекс квадратичной части гамильтониана для  $C_n$  всюду равен 1.

Таким образом, используя численный анализ критических точек системы (2.10), мы доказали следующую теорему.

**Теорема 5.** *В задаче трех одинаковых вихрей в круге существует одно (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейство  $C_n$  коллинеарных несимметричных стационарных конфигураций, которые неустойчивы.*

## 5. Дискуссия

Интересно сравнить полученные результаты для трех вихрей равной интенсивности в круге с аналогичными результатами А. Албуи в задаче четырех одинаковых вихрей на плоскости [15, 16]. В частности, А. Албуи показал, что имеется стационарная конфигурация, в которой три вихря образуют равнобедренный треугольник, а четвертый расположен на его оси симметрии; в случае вихрей в круге, центр круга играет роль четвертого вихря.

Отметим еще один результат, который также можно попытаться обобщить на рассматриваемую нами задачу, — это теорема о конечности числа относительных равновесий в задаче четырех вихрей на плоскости при произвольных интенсивностях [22]. Для вихрей в круге вопрос о конечности числа стационарных конфигураций при произвольных интенсивностях требует дополнительных исследований, так как в доказательствах работы [22] существенным образом используется однородность уравнений движения.

Заметим также, что рассматриваемые стационарные конфигурации могут играть важную роль в динамике вихревых пятен и кластеров большого числа точечных вихрей. Приведем здесь пример численного моделирования поведения двух вихревых пятен, равных по модулю и противоположных по знаку интенсивности, составленных из большого числа точечных вихрей (см. рис. 9, 10). Как показывает этот численный эксперимент, при достаточном удалении друг от друга вихревые пятна размываются, но не перемешиваются, а центры их завихренности движутся по траекториям точечных вихрей. Пока неизвестно, соответствует ли этому численному результату какое-либо точное решение гидродинамических уравнений с распределенной завихренностью и возможно ли перенести эти результаты на случай трех пятен. Упомянем здесь также работу [29], в которой показано, что на плоскости могут существовать стационарные, равномерно перемещающиеся, конфигурации большого числа точечных вихрей в виде кластеров определенного размера и формы. В то же время хорошо известна гипотеза Онзагера (опирающаяся на предположение о статистическом равновесии), которая утверждает, что в системе точечных вихрей в ограниченной области могут достигаться отрицательные температуры, при которых вихри одного знака стремятся кластеризоваться. Имеющиеся компьютерные эксперименты [19, 33] не позволяют сделать окончательных выводов, этот вопрос требует более тщательного исследования при помощи современных компьютерных методов.

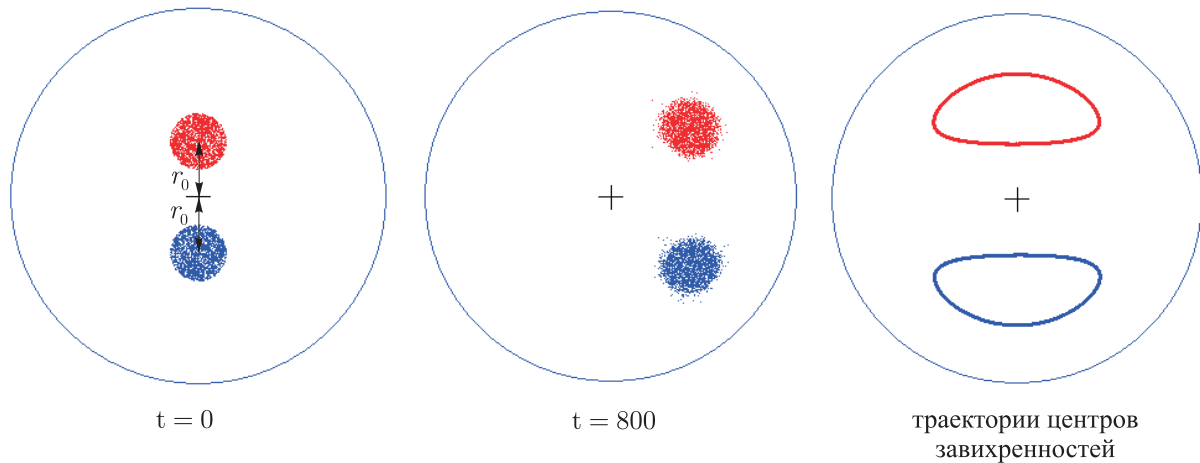


Рис. 9. Эволюция вихревых пятен и траектории центров завихренностей  $r_0 = 0.3$  ( $r_0$  — расстояние до центров пятен в начальный момент времени).

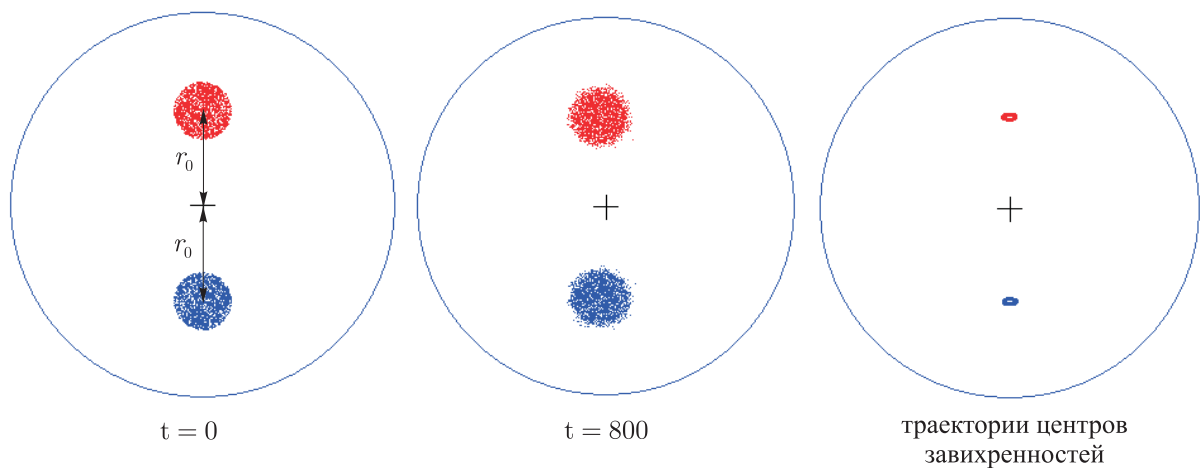


Рис. 10. Эволюция вихревых пятен и траектории центров завихренностей  $r_0 = 0.5$ .

В заключение укажем также, что было бы интересно применить методы, развитые в данной работе, к поиску и анализу частных решений в неконсервативных моделях вихревой динамики (в частности, к задачам о динамике точечных вихреисточников [18] и диссипирующих вихрей [31]).

Авторы выражают благодарность Болсинову А. В. и Килину А. А. за полезные обсуждения в ходе работы.

## Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость: II. Относительные равновесия // Regul. Chaotic Dyn. (принято к печати).
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.—Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2005. 368 с.



- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. С. 414–440.*
- [4] Борисов А. В., Болсинов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // *УМН, 2010, т. 65, вып. 2, с. 71–132.*
- [5] Гуржий А. А., Прокопович И. С. Адвекция пассивной жидкости в поле скорости двух точечных вихрей в круговой области // *Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. Матем. моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления, 2009, № 847, с. 123–130.*
- [6] Каток С. Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // *УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 126–132.*
- [7] Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // *Докл. РАН, 2004, т. 399, вып. 1, с. 52–55.*
- [8] Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // *Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 295–317.*
- [9] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [10] Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебн. пособие для вузов. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
- [11] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. Киев: Наукова думка, 1993. 280 с.
- [12] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах // *КАМ-теория и проблемы устойчивости / Ю. Мозер. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 141–198.*
- [13] Смейл С. Топология и механика // *УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 77–133.*
- [14] Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // *Вестн. Моск. ун-та, 1974, № 6, с. 99–105.*
- [15] Albouy A. Symétrie des configurations centrales de quatre corps // *C. R. Acad. Sci. Paris, 1995, t. 320, sér. 1, pp. 217–220. [Русский перевод в сб. статей: Относительные равновесия. Периодические решения. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, с. 143–148].*
- [16] Albouy A. The symmetric central configurations of four equal masses // *Contemp. Math., 1996, vol. 198, pp. 131–135. [Русский перевод в сб. статей: Относительные равновесия. Периодические решения. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, с. 149–161].*
- [17] Arango C. A., Ezra G. S. Classical mechanics of dipolar asymmetric top molecules in collinear static electric and nonresonant linearly polarized laser fields: Energy-momentum diagrams, bifurcations and accessible configuration space. [arXiv:physics/0611231v1](https://arxiv.org/abs/physics/0611231v1) [physics.class-ph] 23 Nov 2006.
- [18] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the problem of motion of vortex sources on a plane // *Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.*
- [19] Buhler O. Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder // *Phys. Fluids, 2002, vol. 14, no. 7, pp. 2139–2149.*
- [20] Conley C. C., Zehnder R. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations // *Comm. Pure Appl. Math., 1984, vol. 37, no. 2, pp. 207–253.*
- [21] Greenhill A. G. Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math., 1877/78, vol. 15, no. 58, pp. 10–27.*
- [22] Hampton M., Moeckel R. Finiteness of stationary configurations of the four-vortex problem // *Trans. Amer. Math. Soc., 2009, vol. 361, pp. 1317–1332.*
- [23] Hardin J. C., Mason J. P. Periodic motion of two and four vortices in a cylindrical pipe // *Phys. Fluids, 1984, vol. 27, no. 7, pp. 1583–1589.*
- [24] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Philos. Mag., 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.*



- [25] Helmholtz H. Über Integrale hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Rein. Angew. Math., 1858, vol. 55, pp. 25–55. (См. также русский перевод с комментариями С. А. Чаплыгина: Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.–Ижевск: ИКИ, 2002. 82 с.)
- [26] Kimura Y. Motion of two point vortices in a circular domain // J. Phys. Soc. Japan, 1988, vol. 57, no. 5, pp. 1641–1649.
- [27] Kimura Y., Kusumoto Y., Hasimoto H. Some particular solutions for symmetric motion of point vortices in a circular cylinder // J. Phys. Soc. Japan, 1984, vol. 53, no. 9, pp. 2988–2995.
- [28] Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions: I, II // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1941, vol. 27, no. 2, pp. 570–577. (См. также: Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions. Toronto: Univ. Toronto Press, 1943. 39 p.)
- [29] O’Neil K. Clustered equilibria of point vortices // Regul. Chaotic Dyn., 2011 (принято к печати).
- [30] Simakov N. N. Dynamics of two vortices in circular domain // Regul. Chaotic Dyn., 1988, vol. 3, no. 4, pp. 87–94.
- [31] Shashikanth B. N. Dissipative  $N$ -point-vortex models in the plane // J. Nonlinear Sci., 2010, vol. 20, no. 1, pp. 81–103.
- [32] Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings. London: Macmillan, 1883. 124 p.
- [33] Yatsuyanagi Yu., Kiwamoto Ya., Tomita H., Sano M. M., Yoshida T., Ebisuzaki T. Dynamics of two-sign point vortices in positive and negative temperature state // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 94, pp. 054502 (4 p.).

### Stability of new relative equilibria of the system of three point vortices in a circular domain

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>2</sup>, Anastasia V. Vaskina<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Computer Science

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>3</sup>Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>mamaev@rcd.ru, <sup>3</sup>anvask@gmail.com

This paper presents a topological approach to the search and stability analysis of relative equilibria of three point vortices of equal intensities. It is shown that the equations of motion can be reduced by one degree of freedom. We have found two new stationary configurations (isosceles and non-symmetrical collinear) and studied their bifurcations and stability.

MSC 2010: 76M23, 34A05

Keywords: point vortex, reduction, bifurcational diagram, relative equilibriums, stability, periodic solutions

Received November 22, 2010, accepted March 2, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 119–138 (Russian)

